Цель работы: изучение сходимости Фурье-разложения периодического негармонического движения.

Задачи работы:

- записать функцию *f(t)* в аналитическом виде;

- вычислить интегралы, входящие в коэффициенты Фурье на каждом отрезке, где функция *f(t)* непрерывна;

- найти суммарные коэффициенты разложения;

Для вычисления погрешности разложения

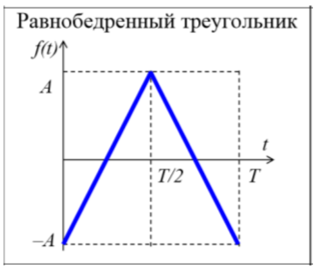
- выражения для a_n и b_n представить в виде C/n^m;

- определить наименьшую степень числа n и константу C при нем;

- вычислить погрешность

Аналитическая часть

Рассмотрим и разложим функцию, заданную графически, в ряд Фурье и найдем гармоники согласно задания (вариант 7).



Разложение заданной функции в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{l} + b_n \sin\frac{n\pi t}{l}\right),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+T} f(t)dt,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+T} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+T} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt.$$

Период данной функции равен T, тогда $l = \frac{T}{2}$ – полупериод.

1. Составим уравнение заданной линии согласно графика:

1) на отрезке $\left[0,\frac{T}{2}\right]$ – прямая, проходящая через точки $(0,-A)$ и $\left(\frac{T}{2},A\right)$:

$$\frac{t-0}{\frac{T}{2}-0}=\frac{f-(-A)}{A-(-A)} \quad\Rightarrow\quad \frac{2t}{T}=\frac{f+A}{2A} \quad\Rightarrow\quad f+A=\frac{4At}{T} \quad\Rightarrow\quad f(t)=A\left(\frac{4t}{T}-1\right).$$

2) на отрезке $\left[\frac{T}{2},T\right]$ – прямая, проходящая через точки $\left(\frac{T}{2},A\right)$ и $(\mathrm{T},-A)$:

$$\frac{t-\frac{T}{2}}{\mathrm{T}-\frac{T}{2}}=\frac{f-A}{-A-A} \quad\Rightarrow\quad \frac{t-\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}=\frac{f-A}{-2A} \quad\Rightarrow\quad f=A-\frac{2A\left(t-\frac{T}{2}\right)\cdot 2}{T} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad f(t)=A\left(4-\frac{4t}{T}-1\right) \quad\Rightarrow\quad f(t)=A\left(3-\frac{4t}{T}\right).$$

Таким образом, уравнение заданной линии:

$$f(t)=\begin{cases} A\left(\dfrac{4t}{T}-1\right) \text{ при } 0\le t<\dfrac{T}{2}, \\ A\left(3-\dfrac{4t}{T}\right) \text{ при } \dfrac{T}{2}\le t<T, \end{cases}$$

2. Вычислим коэффициент $\boldsymbol{a_0}$ по формуле

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+T} f(t)dt,$$

где в нашей задаче $l=\frac{T}{2}$, $\lambda=0$.

$$a_0=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^T f(t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\left(\frac{4t}{T}-1\right)dt+\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\mathrm{T}} A\left(-\frac{4t}{T}+3\right)dt=$$

$$=\frac{2A}{T}\left(\frac{2t^2}{T}-t\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}+\frac{2A}{T}\left(-\frac{2t^2}{T}+3t\right)\Bigg|_{\frac{T}{2}}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\frac{2A}{T}\left(\frac{2}{T}\cdot\frac{T^2}{4}-\frac{T}{2}-0\right)+\frac{2A}{T}\left(-\frac{2T^2}{\mathrm{T}}+3\mathrm{T}-(-\frac{2T^2}{4\mathrm{T}}+3\cdot\frac{\mathrm{T}}{2})\right)=$$

$$=\frac{2A}{T}\left(\frac{T}{2}-\frac{T}{2}\right)+\frac{2A}{T}\left(-2\mathrm{T}+3\mathrm{T}+\frac{T}{2}-3\cdot\frac{\mathrm{T}}{2}\right)=\ \frac{2A}{T}\cdot(\mathrm{T}-\mathrm{T})=0 \quad\Rightarrow\quad a_0=0.$$

3. Вычислим коэффициент $\boldsymbol{a_n}$ по формуле

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+T} f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}dt.$$

$$a_n=\frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^T f(t)\cdot\cos\frac{\pi n t}{\frac{T}{2}}dt=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\left(\frac{4t}{T}-1\right)\cdot\cos\frac{2\pi n t}{T}dt+$$

$$+\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} A\left(-\frac{4t}{T}+3\right)\cos\frac{2\pi n t}{T}dt=$$

$$=\frac{2A}{T}\cdot\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\cdot\cos\frac{2\pi n t}{T}dt-\frac{2A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\cos\frac{2\pi n t}{T}dt-$$

$$-\frac{2A}{T}\cdot\frac{4}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\mathrm{T}} t\cdot\cos\frac{2\pi n t}{T}dt+\frac{2A}{T}\cdot 3\int_{\frac{T}{2}}^{\mathrm{T}}\cos\frac{2\pi n t}{T}dt.$$

$$a_n=\frac{8A}{T^2}\cdot\frac{T}{2\pi n}\left(t\cdot\sin\frac{2\pi nt}{T}+\frac{T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}-\frac{2A}{T}\cdot\frac{T}{2\pi n}\cdot\sin\frac{2\pi nt}{T}\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}-$$
$$-\frac{8A}{T^2}\cdot\frac{T}{2\pi n}\left(t\cdot\sin\frac{2\pi nt}{T}+\frac{T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)\Bigg|_{\frac{T}{2}}^{\mathrm{T}}+\frac{6A}{T}\cdot\frac{T}{2\pi n}\cdot\sin\frac{2\pi nt}{T}\Bigg|_{\frac{T}{2}}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\frac{4A}{\pi nT}\left(\frac{T}{2}\cdot\sin\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2}+\frac{T}{2\pi n}\cdot\cos\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2}-0-\frac{T}{2\pi n}\cdot\cos0\right)-\frac{A}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2}-0$$

$$-\frac{4A}{\pi nT}\left(T\cdot\sin\frac{2\pi n}{T}\cdot\mathrm{T}+\frac{T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi n}{T}\cdot\mathrm{T}-\frac{T}{2}\cdot\sin\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2}-\frac{T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)+$$
$$-\frac{3A}{\pi n}\left(\sin\frac{2\pi nT}{T}-\sin\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)=$$

$$=\frac{2A}{\pi n}\sin\pi n+\frac{2A}{(\pi n)^2}\cos\pi n-\frac{2A}{(\pi n)^2}-\frac{A}{\pi n}\sin\pi n-$$
$$-\frac{4A}{\pi n}\sin2\pi n-\frac{2A}{(\pi n)^2}\cos2\pi n+\frac{2A}{\pi n}\sin2\pi n+\frac{2A}{(\pi n)^2}\cos\pi n-\frac{3A}{\pi n}\sin2\pi n+\frac{3A}{\pi n}\sin2\pi n=$$

$$=\frac{2A}{(\pi n)^2}\cos\pi n-\frac{2A}{(\pi n)^2}-\frac{2A}{(\pi n)^2}+\frac{2A}{(\pi n)^2}\cos\pi n$$

$$=\frac{4A}{(\pi n)^2}(\cos\pi n-1)=\frac{4A}{(\pi n)^2}((-1)^n-1).$$

4. Вычислим коэффициент $\boldsymbol{b_n}$ по формуле
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+T}f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}dt.$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt=\frac{2A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{4t}{T}-1\right)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt+$$
$$+\frac{2A}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\mathrm{T}}\left(-\frac{4t}{T}+3\right)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt=$$

$$=\frac{2A}{T}\cdot\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}t\cdot\sin\frac{2\pi nt}{T}dt-\frac{2A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi nt}{T}dt-$$
$$-\frac{2A}{T}\cdot\frac{4}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\mathrm{T}}t\cdot\sin\frac{2\pi nt}{T}dt+\frac{2A}{T}\cdot3\int_{\frac{T}{2}}^{\mathrm{T}}\sin\frac{2\pi nt}{T}dt.$$

$$b_n=-\frac{8A}{T^2}\cdot\frac{T}{2\pi n}\left(t\cdot\cos\frac{2\pi nt}{T}-\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}+\frac{2A}{T}\cdot\frac{T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}+$$
$$+\frac{8A}{T^2}\cdot\frac{T}{2\pi n}\left(t\cdot\cos\frac{2\pi nt}{T}-\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)\Bigg|_{\frac{T}{2}}^{\mathrm{T}}-\frac{6A}{T}\cdot\frac{T}{2\pi n}\cdot\cos\frac{2\pi nt}{T}\Bigg|_{\frac{T}{2}}^{\mathrm{T}}=$$

$$= -\frac{4A}{\pi n T}\left(\frac{T}{2}\cdot\cos\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2} - \frac{T}{2\pi n}\cdot\sin\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2} - 0 + 0\right) + \frac{A}{\pi n}\left(\cos\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2} - 1\right) +$$

$$+\frac{4A}{\pi n T}\left(\mathrm{T}\cos\frac{2\pi n}{T}\cdot\mathrm{T} - \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n}{T}\cdot\mathrm{T} - \frac{T}{2}\cdot\cos\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2} + \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) -$$

$$-\frac{3A}{\pi n}\left(\cos\frac{2\pi n}{T}\cdot T - \cos\frac{2\pi n}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) =$$

$$= -\frac{2A}{\pi n}\cos\pi n + \frac{4A}{(\pi n)^2}\sin\pi n + \frac{A}{\pi n}\cos\pi n - \frac{A}{\pi n} + \frac{4A}{\pi n}\cos 2\pi n -$$
$$-\frac{2A}{(\pi n)^2}\sin 2\pi n - \frac{2A}{\pi n}\cos\pi n +$$
$$+\frac{2A}{(\pi n)^2}\sin\pi n - \frac{3A}{\pi n}\cos 2\pi n + \frac{3A}{\pi n}\cos\pi n =$$

$$= \cos\pi n\left(-\frac{2A}{\pi n} + \frac{A}{\pi n} - \frac{2A}{\pi n} + \frac{3A}{\pi n}\right) - \frac{A}{\pi n}(1 - 4 + 3) = 0$$

5. Таким образом, найдено разложение функции $f(t)$ в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A}{(\pi n)^2}((-1)^n - 1)\cos\frac{2\pi n t}{T}$$

Програмное определение коэффицентов Фурье

Для вычисления коэффициентов написана программа в среде MatLab:

```
syms t A T n;
l = T/2;

% Определим функции, соответствующие четырем отрезкам
f1 = @(t) 4*A*t/T - A;
f2 = @(t) 3*A-4*A*t/T;

% Для нахождения коэффициента a0 вычислим 2 интеграла, соответствующие
каждому отрезку
a01 = (1/l) * int(f1, t, [0,T/2]);
a02 = (1/l) * int(f2, t, [T/2,T]);

% Сложим полученные интегралы, чтобы получить коэффициент a0
a0 = a01 + a02;

% Для нахождения коэффициента an вычислим 2 интеграла, соответствующие
каждому отрезку
an1 = (1/l) * int(f1 * cos(pi*n*t/l), t, [0,T/2]);
an2 = (1/l) * int(f2 * cos(pi*n*t/l), t, [T/2,T]);

% Сложим полученные интегралы, чтобы получить коэффициент an, и упростим
```

полученное выражение
an = an1 + an2;
an = simplify(an);

% Для нахождения коэффициента b_n вычислим 2 интеграла, соответствующие каждому отрезку
bn1 = (1/l) * int(f1 * sin(pi*n*t/l), t, [0,T/2]);
bn2 = (1/l) * int(f2 * sin(pi*n*t/l), t, [T/2,T]);

% Сложим полученные интегралы, чтобы получить коэффициент b_n, и упростим полученное выражение
bn = bn1 + bn2;
bn = simplify(bn);

% Выведем найденные коэффициенты на экран
disp(a0);
disp(an);
disp(bn);

Построение гармоник

Для построения графиков определим значения постоянных A и T, например $A = 1,\ T = 1$.

Важно! В разложении участвуют только косинус-компоненты нечетных гармоник.

Найдем частичные суммы ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{l} + b_n \sin\frac{n\pi t}{l}\right).$$

При $N = 1$ получим:

$$f(t) \approx \frac{4 \cdot 1}{(\pi n)^2}((-1)^n - 1)\cos\frac{2\pi n t}{T} =$$
$$= \frac{4}{\pi^2}\big((-1) - 1\big)\cos 2\pi t = -\frac{8}{\pi^2} \cdot \cos 2\pi t.$$

График данной функции приведен на Рисунке 1.
При $N = 3$ получим:

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{3} \frac{4 \cdot 1}{(n\pi)^2}\ ((-1)^n - 1)\cos\frac{2\pi n t}{T} = -\frac{8}{\pi^2} \cdot \cos 2\pi t - \frac{4}{9\pi^2} \cdot \cos 6\pi t$$

График при $N = 3$ приведен на Рисунке 2.

Аналогично вычисляются значения при $N = 5$ (Рисунок 3), $N = 11$ (Рисунок 4), $N = 101$ (Рисунок 5),

Для построения графиков при различных N написана следующая программа в среде MatLab:

```
hA = 1;
hT = 1;
hl = hT/2;
N = 101;

fh1 = @(t) hA * (4*A*t/T - A);
fh2 = @(t) hA*(3*A-4*A*t/T);

full = sym(0);
for hn = 1 : N
    a = subs(an,A,hA);
    a = subs(a,n,hn);
    fa = a * cos(pi*hn*t/hl);

    b = subs(bn,A,hA);
    b = subs(b,n,hn);
    fb = b * sin(pi*hn*t/hl);

    full = full + fa + fb;
end

ezplot(full, [0,hT]), hold on
ht = 0 : 0.01 : hT/2;       plot(ht, fh1(ht), 'r-');
ht = hT/2 : 0.01 : hT;    plot(ht, fh2(ht), 'r-');
hold off
```

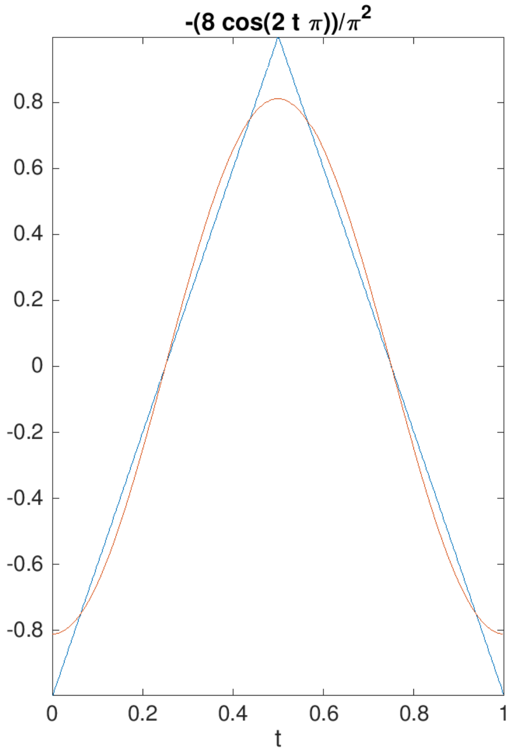


Рисунок 1. При $N = 1$

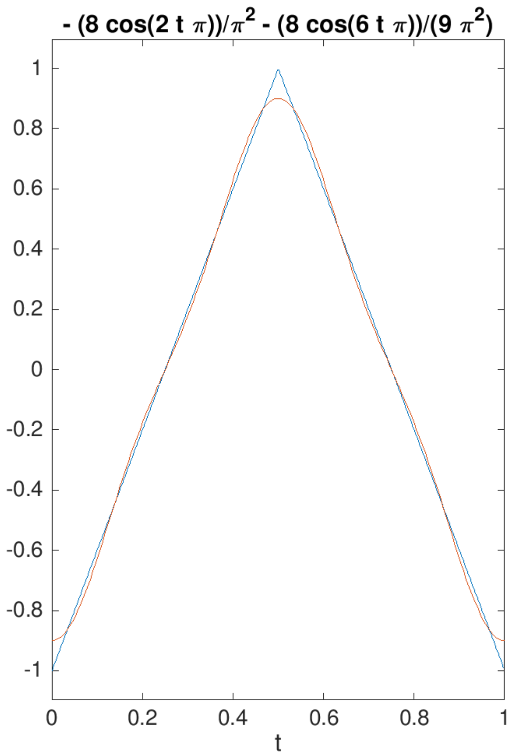


Рисунок 2. При $N = 3$

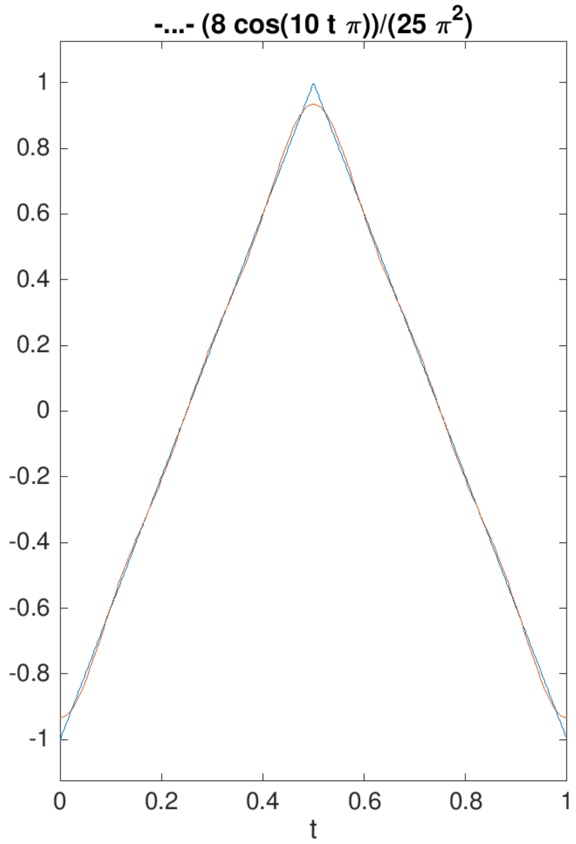


Рисунок 3. При $N = 5$

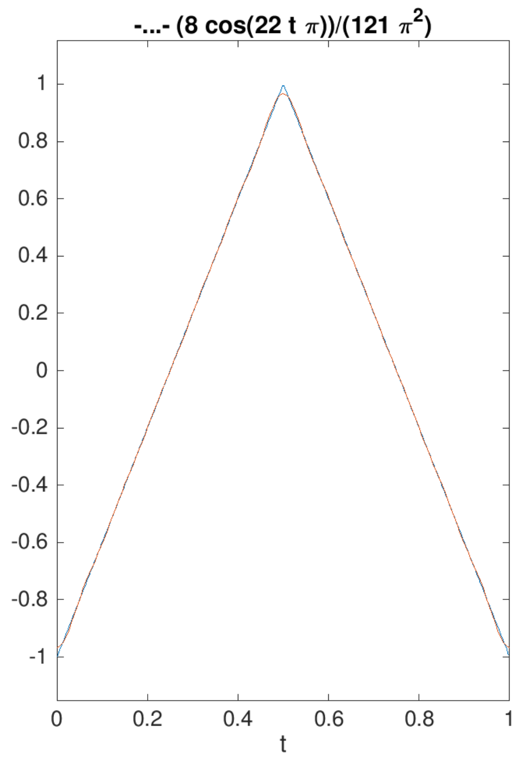


Рисунок 4. При $N = 11$

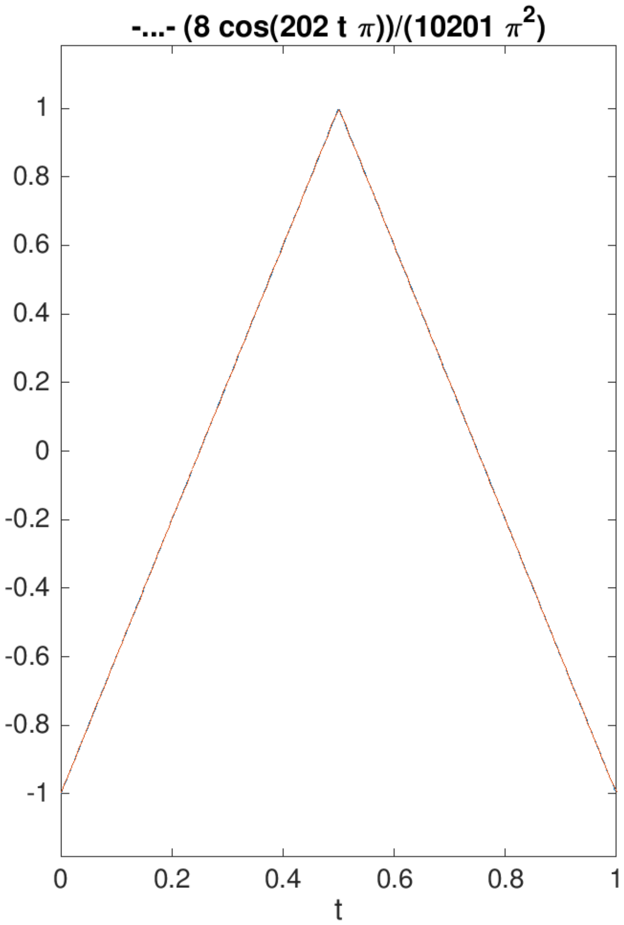


Рисунок 5. При $N = 101$